การอนุมานเชิงสถิติ

รศ.ดร.ลัคนา วัฒนะชีวะกุล

- **การอนุมานเชิงสถิติ (Statistical Inference)**

  เป็นการนำข้อสรุปที่ได้จากการศึกษาข้อมูลตัวอย่าง ไปอ้างถึงลักษณะของประชากร มี 2 รูปแบบ คือ การประมาณค่า และการทดสอบสมมติฐาน

นิยาม ***การประมาณ*** (Estimation) คือการใช้ข้อมูลจากตัวอย่างมาประมาณค่าคุณลักษณะต่างๆ ของประชากร (พารามิเตอร์) เช่น ค่าเฉลี่ย สัดส่วน ความแปรปรวน เป็นต้น

การประมาณค่ามี 2 แบบ คือ

1. การประมาณค่าแบบจุด (Point estimation)

   เป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยค่าเพียงค่าเดียว ในการประมาณค่าแบบจุดค่าประมาณที่ได้มีโอกาสคลาดเคลื่อนไปจากค่าจริงได้มาก

2. การประมาณค่าแบบช่วง (Interval estimation)

   เป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยช่วงค่าซึ่งอยู่ระหว่าง 2 ค่าและค่าประมาณแบบจุดอยู่กึ่งกลางระหว่างค่าสองค่า ซึ่งมีโอกาสคลาดเคลื่อนไปจากค่าจริงได้น้อยกว่าการประมาณค่าแบบจุด โดยช่วงของการประมาณจะขึ้นอยู่กับขนาดตัวอย่างและชนิดของการแจกแจง และมีการกำหนดความน่าจะเป็นให้กับช่วงของการประมาณ

กล่าวคือ ถ้าให้ θ เป็นค่าพารามิเตอร์ใดๆ ที่มีค่าอยู่ระหว่าง a และ b โดย

$$P(a < \theta < b) = 1 - \alpha$$

$(1-\alpha)100\%$ หมายถึงช่วงความเชื่อมั่น

$(1-\alpha)$ หมายถึงสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น

a หมายถึงขีดจำกัดล่างความเชื่อมั่น

b หมายถึงขีดจำกัดบนความเชื่อมั่น

นิยาม ***ตัวประมาณค่า*** (Estimator) หมายถึงฟังก์ชันของตัวอย่างสุ่ม เช่น ตัวประมาณที่ใช้ในการประมาณค่าเฉลี่ยคือ $\overline{X}$ ตัวประมาณที่ใช้ในการประมาณสัดส่วนคือ $\hat{p}$

การประมาณค่าเฉลี่ยของประชากร

ให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n จากประชากรที่มีการแจกแจงปกติด้วยค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2

$\bar{X}$ หมายถึงค่าเฉลี่ยของตัวอย่างเป็นตัวประมาณค่าแบบจุดของ μ

การประมาณค่าเฉลี่ยของประชากร มี 3 กรณีดังนี้

กรณีที่1 ทราบค่า σ^2 ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ μ คือ

$$\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(in class)

กรณีที่2 ไม่ทราบค่า σ^2 แต่ $n \geq 30$ ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$

ของ μ คือ $\bar{X} - Z_{\alpha/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{\alpha/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}}$

กรณีที่3 ไม่ทราบค่า σ^2 และ $n < 30$ ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$

ของ μ คือ $\bar{X} - t_{\alpha/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\alpha/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}}$ ที่ d.f. $= n-1$

การประมาณผลต่างค่าเฉลี่ยของประชากรที่เป็นอิสระ

กรณีที่ 1 ทราบค่า σ_1^2 **และ** σ_2^2

ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ $\mu_1 - \mu_2$ คือ

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

กรณีที่ 2 ไม่ทราบค่า σ_1^2 **และ** σ_2^2 **แต่** $n_1 \geq 30$ **และ** $n_2 \geq 30$

ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ $\mu_1 - \mu_2$ คือ

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

กรณีที่ 3 ไม่ทราบค่า σ_1^2 และ σ_2^2 แต่ทราบว่า $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ โดย $n_1 < 30$ และ $n_2 < 30$

ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ $\mu_1 - \mu_2$ คือ

$$\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - t_{\alpha/2}\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} < \mu_1 - \mu_2 < \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) + t_{\alpha/2}\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$$

ที่ d.f. = $n_1 + n_2 - 2$

กรณีที่ 4 ไม่ทราบค่า σ_1^2 และ σ_2^2 แต่ทราบว่า $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ โดย $n_1 < 30$ และ $n_2 < 30$

ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ $\mu_1 - \mu_2$ คือ

$$\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) + t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$$

ที่ d.f.= ν

โดย $$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

การประมาณผลต่างค่าเฉลี่ยของประชากรที่มีความสัมพันธ์กัน

ถ้าตัวอย่างสุ่มแต่ละหน่วยมีการวัดค่าสังเกต 2 ครั้ง เช่น น้ำหนักของหนูก่อนและหลังการทดลอง อุณหภูมิของห้องทดลองในเวลาเช้าและบ่าย คะแนนก่อนและหลังเรียน การที่ค่าสังเกต 2 ค่ามาจากหน่วยตัวอย่างเดียวกันแสดงว่าค่าสังเกตมีความสัมพันธ์กัน ให้ $d_i = X_{1i} - X_{2i}$ เป็นผลต่างค่าสังเกตจากตัวอย่างที่ i, $i = 1, 2, \ldots, n$ เมื่อสุ่มตัวอย่างจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติที่มี $\mu_d = \mu_1 - \mu_2$

ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ μ_d คือ

$$\bar{d} - t_{\alpha/2}\frac{s_d}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{d} + t_{\alpha/2}\frac{s_d}{\sqrt{n}} \quad \text{ที่ d.f.} = n-1$$

การประมาณสัดส่วนของประชากร

หากข้อมูลที่สนใจเป็นข้อมูลเชิงคุณภาพ เราจะพิจารณาสัดส่วนของประชากรในเรื่องที่สนใจเช่น สัดส่วนของผู้ที่เห็นด้วยกับการรณรงค์เมาไม่ขับ สัดส่วนของสินค้าที่ผ่านมาตรฐานการผลิต เป็นต้น

ให้ p หมายถึงสัดส่วนของประชากร โดย $p = \frac{X}{N}$

ในที่นี้ X หมายถึงจำนวนของลักษณะที่สนใจในประชากร

N หมายถึงขนาดของประชากร

และ $\hat{p}$ หมายถึงสัดส่วนของตัวอย่างโดย $\hat{p} = \frac{x}{n}$

ในที่นี้ x หมายถึงจำนวนของลักษณะที่สนใจในตัวอย่าง

n หมายถึงขนาดของตัวอย่าง

ถ้าขนาดตัวอย่างมาก $\hat{p}$ จะมีการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ p และความแปรปรวนเท่ากับ $\frac{pq}{n}$ ดังนั้น $Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}}$ มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน

ให้ $\hat{p}$ หมายถึงสัดส่วนของตัวอย่าง เป็นตัวประมาณค่าแบบจุดของ p ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ p คือ

$$\hat{p} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} < p < \hat{p} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

การประมาณสัดส่วนของผลต่างประชากร

ให้ $\hat{p}_1$ และ $\hat{p}_2$ เป็นสัดส่วนของตัวอย่างขนาด n_1 และ n_2 ที่สุ่มมาจากประชากรที่ 1 และ 2 ตามลำดับ ถ้าขนาดตัวอย่างมาก $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ จะมีการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ $p_1 - p_2$ และความแปรปรวนเท่ากับ $\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}$ ดังนั้น

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}}}$$ มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน

ให้ $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ หมายถึงผลต่างสัดส่วนของตัวอย่าง เป็นตัวประมาณค่าแบบจุด ของ $p_1 - p_2$

ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ $p_1 - p_2$ คือ

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}} < p_1 - p_2 < (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}$$

การประมาณค่าความแปรปรวนของประชากร

ให้ s^2 หมายถึงความแปรปรวนของตัวอย่าง และเป็นตัวประมาณค่าแบบจุดของ σ^2 แล้วความสัมพันธ์ของ s^2 และ σ^2 อยู่ในรูป $\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ ที่ d.f.$=n-1$

ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ σ^2 คือ

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \qquad \text{ที่ d.f.} = n-1$$

การประมาณอัตราส่วนความแปรปรวนของประชากร

ให้ $\frac{s_1^2}{s_2^2}$ หมายถึงอัตราส่วนความแปรปรวนของตัวอย่าง และเป็นตัวประมาณค่าแบบจุดของ $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ แล้ว ความสัมพันธ์ของ $\frac{s_1^2}{s_2^2}$ และ $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ อยู่ในรูป $F = \frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2}$ ที่

$\nu_1 = n_1 - 1$ และ $\nu_2 = n_2 - 1$

ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ คือ

$$\frac{s_1^2}{s_2^2\left(F_{\alpha/2}\right)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2\left(F_{1-\alpha/2}\right)}$$

ที่ $\nu_1 = n_1 - 1$ และ $\nu_2 = n_2 - 1$

การทดสอบสมมติฐาน

นิยาม ***สมมติฐาน***(Hypothesis) คือข้อความที่กำหนดขึ้นจากความเชื่อของบุคคลหรือองค์กร อาจเป็นจริงหรือไม่ก็ได้ ดังนั้นจึงมีการทดสอบความเชื่อดังกล่าวเรียกว่า การทดสอบสมมติฐานทางสถิติ

สมมติฐานทางสถิติมี 2ชนิดคือ

1. **สมมติฐานว่าง** (Null Hypothesis) คือข้อความที่กำหนดให้พารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบมีค่าเท่ากับค่าใดค่าหนึ่งอย่างแน่นอน ใช้สัญลักษณ์ H_0 และผลของการทดสอบจะเป็นการยอมรับหรือปฏิเสธ H_0 เท่านั้น
2. **สมมติฐานทางเลือก** (Alternative Hypothesis) คือข้อความที่กำหนดขึ้นมาเพื่อเป็นข้อสรุปเมื่อผลการทดสอบปฏิเสธ H_0 ใช้สัญลักษณ์ H_1 หรือ H_a

การทดสอบสมมติฐานทางสถิติอาจมีความผิดพลาดเกิดขึ้นได้ ความผิดพลาดมี 2 ชนิดคือ

1. **ความผิดพลาดชนิดที่ 1** (Type I error) คือความผิดพลาดที่เกิดจากการปฏิเสธ H_0 เมื่อ H_0 เป็นจริง และความน่าจะเป็นที่เกิดความผิดพลาดชนิดที่ 1 เรียกว่า **ระดับนัยสำคัญ** (Level of Significance) ใช้สัญลักษณ์ α

2. **ความผิดพลาดชนิดที่ 2** (Type II error) คือความผิดพลาดที่เกิดจากการยอมรับ H_0 เมื่อ H_0 เป็นเท็จ และความน่าจะเป็นที่เกิดความผิดพลาดชนิดที่ 2 ใช้สัญลักษณ์ β

นิยาม ***อาณาเขตวิกฤต*** (Critical Region) คือเขตปฏิเสธ H_0 ซึ่งจะกำหนดจากระดับนัยสำคัญ และค่าที่ใช้ในการแบ่งอาณาเขตวิกฤตกับอาณาเขตยอมรับ H_0 เรียกว่า ค่าวิกฤต (Critical Value)

นิยาม ***ค่าสถิติทดสอบ*** (Test Statistic) คือค่าที่ใช้ในการพิจารณาว่าจะปฏิเสธหรือยอมรับสมมติฐาน H_0 โดยเราเลือกสถิติทดสอบจากสมมติฐาน

การทดสอบสมมติฐานค่าเฉลี่ยประชากร

ในการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของประชากร มีขั้นตอนในการทดสอบดังนี้

1. กำหนดสมมติฐานว่างและสมมติฐานทางเลือก

$H_0 : \mu = \mu_0$ และ

$H_1 : \mu > \mu_0$ หรือ

$H_1 : \mu < \mu_0$ หรือ

$H_1 : \mu \neq \mu_0$

2. กำหนดระดับนัยสำคัญ

3. คำนวณค่าสถิติทดสอบ

กรณีที่ 1 ทราบค่า σ^2

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

กรณีที่ 2 ไม่ทราบค่า σ^2 **แต่** $n \geq 30$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

กรณีที่ 3 ไม่ทราบค่า σ^2 **และ** $n < 30$

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \qquad \text{ที่ d.f.} = n - 1$$

4) กำหนดเขตวิกฤต

กรณีที่ 1-

ถ้า $H_1 : \mu > \mu_0$ แล้วเขตวิกฤตคือ $Z > Z_\alpha$

ถ้า $H_1 : \mu < \mu_0$ แล้วเขตวิกฤตคือ $Z < -Z_\alpha$

ถ้า $H_1 : \mu \neq \mu_0$ แล้วเขตวิกฤตคือ $Z < -Z_{\alpha/2}$ หรือ $Z > Z_{\alpha/2}$

กรณีที่

ถ้า $H_1 : \mu > \mu_0$ แล้วเขตวิกฤตคือ $t > t_{\alpha,n-1}$

ถ้า $H_1 : \mu < \mu_0$ แล้วเขตวิกฤตคือ $t < -t_{\alpha,n-1}$

ถ้า $H_1 : \mu \neq \mu_0$ แล้วเขตวิกฤตคือ $t < -t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ หรือ $t > t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$

ตัวอย่าง บริษัทผลิตหลอดไฟแอลอีดีแห่งหนึ่งอ้างว่า อายุการใช้งานหลอดไฟแอลอีดีที่บริษัทผลิต มีการแจกแจงปรกติด้วยค่าเฉลี่ย 18,000 ชั่วโมง ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 420 ชั่วโมง สุ่มหลอดไฟแอลอีดีที่ผลิตโดยบริษัทแห่งนี้ 49 หลอด พบว่ามีอายุการใช้งานเฉลี่ย 17,880 ชั่วโมง จงทดสอบว่าคำกล่าวอ้างของบริษัทเป็นจริงหรือไม่ ณ ระดับนัยสำคัญ 0.05

ตัวอย่าง บริษัทขายยางรถยนต์ยี่ห้อหนึ่งโฆษณาว่าอายุการใช้งานเฉลี่ยของยางรถยนต์อย่างน้อย 28,000 กิโลเมตร และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 1,350 กิโลเมตร เพื่อตรวจสอบคำกล่าวอ้างนี้ สมาคมคุ้มครองผู้บริโภค จึงลองทดสอบยางรถยนต์ยี่ห้อนี้ โดยสุ่มมา 100 เส้น พบว่าอายุการใช้งานเฉลี่ยเท่ากับ 27,800 กิโลเมตร สมาคมคุ้มครองผู้บริโภคสามารถเอาผิดกับบริษัทได้หรือไม่ที่ระดับนัยสำคัญ 0.01

ตัวอย่าง ในโครงการก่อสร้างโรงเรือนเกษตรด้วยอิฐชนิดหนึ่ง ถ้าอิฐมีแรงกดเฉลี่ยต่ำกว่า 3,200 ปอนด์ต่อตารางนิ้ว จะไม่สามารถนำมาก่อสร้างได้ ถ้าสุ่มอิฐชนิดนี้มา 36 ก้อน ทดสอบแรงกดพบว่า มีแรงกดเฉลี่ยเท่ากับ 3,180 ปอนด์ต่อตารางนิ้ว และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 90 ปอนด์ต่อตารางนิ้ว จงทดสอบว่าสามารถนำอิฐชนิดนี้มาใช้ในโครงการก่อสร้างโรงเรือนเกษตรได้หรือไม่ ณ ระดับนัยสำคัญ 0.05